

Zur Frage der Plasmaschwingungen und -Wellen in Halbleitern I

Von E. GROSCHWITZ und K. SIEBERTZ

Aus dem Wernerwerk für Bauelemente der Siemens & Halske AG, München
(Z. Naturforsch. 11 a, 482—491 [1956]; eingegangen am 5. April 1956)

Herrn Professor TRENDLENBURG zum 60. Geburtstag gewidmet

Auf Grund der Verwandtschaft eines elektronischen Halbleiters mit einem Plasma werden die Grundgesetze für die Beschreibung periodischer Zustände und deren wellenförmige Ausbreitung in einem Halbleiter formuliert und an speziellen Beispielen erörtert. Für das Verhalten der Halbleiter im Zentimeterwellen- und Millimeterwellengebiet ergeben sich charakteristische Gesetzmäßigkeiten. Die Existenz von Plasmaschwingungen oder -Wellen ist an bestimmte Bedingungen geknüpft, die man durch frei verfügbare Parameter in gewissen Grenzen erfüllen kann.

Zwischen einem Halbleiter und einem ionisierten Gas besteht eine weitgehende Verwandtschaft¹. Man kann deshalb einen elektronischen Halbleiter als ein Plasma betrachten. Die thermischen Schallquanten des Kristallgitters entsprechen dem Neutralgas, die im Stör- und Eigenleitungsbereich ionisierten Donatoren und Akzeptoren werden als Gasgemisch einfach geladener negativer und positiver Ionen aufgefaßt, zu denen noch das Gasgemisch der quasi-freien Leitungselektronen und Defektelektronen hinzukommt. Die Donatoren und Akzeptoren nehmen im allgemeinen an Bewegungsvorgängen innerhalb des Plasmas nicht teil. Unter Plasmaschwingungen bzw. -Wellen versteht man periodische Zustände und deren wellenförmige Ausbreitung. Das System der beweglichen Ladungsträger weist Eigenfrequenzen auf, die mit der LANGMUIRSchen² Plasmafrequenz $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n / m_{\text{eff}}}$ in engem Zusammenhang stehen (n Teilchendichte, m_{eff} effektive Masse). Bei Metallen liegt diese Plasmafrequenz im Ultraviolett. In Halbleitern können jedoch bei den sehr viel kleineren Teilchenkonzentrationen Eigenfrequenzen des Plasmas auftreten, die für das Gebiet der Mikrowellen von Interesse sind. Bei den Minoritätsträgern liegen die zugehörigen Wellenlängen sogar im Dezimeter- oder Zentimeterbereich. Im Zusammenhang mit Zyklotron-Resonanzmessungen haben DRESSELHAUS, KIP und KITTEL³ Plasmaresonanzeffekte beobachtet. Bei Zyklotronresonanz ist die Resonanzfrequenz durch die LARMOR-Frequenz $\omega_L = eH/c m_{\text{eff}}$ gegeben. Die Erscheinung der Plasmaresonanz hingegen beruht auf dem Depolarisationseffekt, der durch die dielektrische Polarisierung des Kristalls entsteht.

Die Plasmaschwingungen werden sowohl von den Eigenschaften und der Struktur des Halbleiters als auch von den anwesenden elektrischen und magnetischen Feldern bestimmt, so daß sich je nach Wahl der Parameter und je nach Anordnung des Systems eine große Anzahl von möglichen Erscheinungen ergibt. Es erscheint uns deshalb angebracht, eine Beschreibung des Plasmas in genügender Allgemeinheit zu formulieren, der sich spezielle Fälle entnehmen lassen. Außerdem sollen zunächst an einfachen Beispielen die Bedingungen für das Auftreten von speziellen Plasmaschwingungen und -Wellen untersucht werden, wobei orientierend einige Zusammenhänge erörtert werden sollen, die auch für die Frage der praktischen Anwendung von Bedeutung sind. Wir betrachten deshalb nur den Temperaturbereich der Störleitung, in dem alle Donatoren und Akzeptoren als dissoziiert anzusehen sind. Von LAMPERT⁴ wurde die Möglichkeit stehender Plasmawellen in einer Halbleiterscheibe diskutiert, die einem Elektronenstrahl ausgesetzt wird. Die Frage spezieller Möglichkeiten zur Erzeugung von Plasmaschwingungen soll hier zunächst nicht erörtert werden.

Das nichtstationäre inhomogene Plasma des Halbleiters

Bei der Beschreibung des Plasmas machen wir im folgenden einige vereinfachende Voraussetzungen:

1. Die effektiven Massen der Leitungselektronen und der Defektelektronen sollen isotrop sein.
2. Der Einfluß der elektrischen und magnetischen Felder auf die Geschwindigkeitsverteilung der Elek-

¹ W. SHOCKLEY, Bell Syst. Techn. J. 4 I, 990 [1951]. — E. J. RYDER u. W. SHOCKLEY, Phys. Rev. 81, 139 [1951].

² J. LANGMUIR u. C. TONKS, Phys. Rev. 33, 195 [1929].

³ G. DRESSELHAUS, A. F. KIP u. C. KITTEL, Phys. Rev. 98, 368 [1955] und 100, 618 [1955].

⁴ M. A. LAMPERT, J. Appl. Phys. 27, 6 [1956].



tronen und Löcher soll vernachlässigt werden. Die Dämpfungskonstanten für beide Arten von Ladungsträgern werden somit als isotrop und von der Energie der Teilchen unabhängig angenommen. Das statische elektrische Feld soll demzufolge noch so klein sein, daß die Elektronentemperatur von der Gittertemperatur nicht wesentlich verschieden ist.

3. Wir beschreiben das Plasma makroskopisch-phenomenologisch, indem wir mit den sich aus den äußeren Bedingungen ergebenden Mittelwerten der Zustandsgrößen rechnen⁵.

4. Die magnetischen Materialeigenschaften des Halbleiters lassen wir unberücksichtigt, so daß man sich im folgenden für die Permeabilität μ stets den Wert 1 eingesetzt zu denken hat.

Der Zustand des Plasmas wird durch die Momentan-Werte der Feldvektoren des elektromagnetischen Feldes \mathbf{E} und \mathbf{H} , durch die Polarisation \mathbf{P} , durch die Driftgeschwindigkeiten \mathbf{v}_n und \mathbf{v}_p und die Konzentrationen der Leitungselektronen und Löcher n und p beschrieben. Diese Größen sind sowohl Funktionen der Raumkoordinaten x, y und z als auch der Zeit t . Die Ladung eines Defektelektrons wird mit $+e$ bezeichnet. Die voneinander unabhängigen Fundamentalgleichungen numerieren wir zusätzlich mit römischen Zahlen. Der Index n bezieht sich auf Elektronen, der Index p auf Löcher. Für das Plasma steht unter den Voraussetzungen 1–4 das folgende System von Gleichungen zur Verfügung:

Die Feldgleichungen

$$\text{I} \quad \mathbf{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \mathbf{H}, \quad (1)$$

$$\text{II} \quad -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{E} \quad (2)$$

mit den Verknüpfungsgleichungen (unter Berücksichtigung der 4. Voraussetzung)

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (3)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (4)$$

(\mathbf{D} dielektrische Verschiebung, \mathbf{B} Induktion, ε frequenzabhängige Dielektrizitätskonstante des Halbleiters). Die Stromdichte \mathbf{j} in (1) enthält die Anteile des Konvektionsstromes und des Diffusionsstromes der Elektronen und Löcher

$$\mathbf{j} = -en\mathbf{v}_n + ep\mathbf{v}_p + eD_n \text{grad } n - eD_p \text{grad } p. \quad (5)$$

Im Konvektionsstrom ist der Polarisationsstrom bereits enthalten. Die Größen D_n und D_p sind die Diffusionsstensoren.

Die Poissonsche Gleichung

$$\text{III} \quad \text{div } \mathbf{E} + 4\pi \text{div } \mathbf{P} = 4\pi \varrho \quad (6)$$

mit der Raumladung

$$\varrho = e(p - n + N_d - N_a). \quad (7)$$

N_d und N_a bedeuten die Dichten der dissoziierten Donatoren und Akzeptoren. Ferner gilt

$$\text{IV} \quad \text{div } (\mu \mathbf{H}) = 0. \quad (8)$$

Die Kontinuitätsgleichungen

$$\text{V} \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{e} \text{div } \frac{\partial \mathbf{P}_n}{\partial t} - \frac{1}{e} \text{div } \mathbf{j}_n = -R(np - n_i^2), \quad (9)$$

$$\text{VI} \quad \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{e} \text{div } \frac{\partial \mathbf{P}_p}{\partial t} + \frac{1}{e} \text{div } \mathbf{j}_p = -R(np - n_i^2) \quad (10)$$

(n_i Eigenleitungs-Dichte) mit den Stromdichten

$$\mathbf{j}_n = -en\mathbf{v}_n + eD_n \text{grad } n, \quad (11)$$

$$\mathbf{j}_p = ep\mathbf{v}_p - eD_p \text{grad } p. \quad (12)$$

Die Größe R ist der Rekombinationskoeffizient. Dieser ist unter Berücksichtigung der Rekombination und Paarbildung über Traps konzentrationsabhängig.

Nach HOFFMANN⁶ gilt in Übereinstimmung mit SHOCKLEY und READ⁷ unter der Voraussetzung räumlicher Homogenität und bei hinreichender Verdünnung der Leitungs- und Defektelektronen sowie der Rekombinationszentren

$$R = \frac{r_{Tn} r_{Tp} n_T}{r_{Tn}(n + K_{Tc}) + r_{Tp}(p + K_{Tv})} \quad (13)$$

mit

$$r_{Tn} = \frac{1}{n_T \tau_{n0}}, \quad r_{Tp} = \frac{1}{n_T \tau_{p0}}$$

(n_T Trapdichte). Die Größen $1/\tau_{n0}$ und $1/\tau_{p0}$ haben die Bedeutung der Einfangwahrscheinlichkeiten für Elektronen und Löcher im Grenzfall hoher Dotierung. Es ist ferner

$$K_{Tc} = N_c \exp\left(-\frac{E_c - E_T}{kT}\right), \quad K_{Tv} = N_v \exp\left(-\frac{E_T - E_v}{kT}\right)$$

mit den effektiven Konzentrationen⁸ N_c und N_v . Die Größen E_c und E_v sind die dem unteren Rand

⁵ A. SCHLÜTER, Z. Naturforschg. **5a**, 72 [1950]; **6a**, 73 [1951].

⁶ Siehe Referat A. HOFFMANN in W. SCHOTTKY: Halbleiterprobleme. Vieweg, Braunschweig 1955, Bd. II.

⁷ W. SHOCKLEY u. W. T. READ, Phys. Rev. **87**, 835 [1952].

⁸ E. SPENKE, Elektronische Halbleiter, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1955.

des Leitungsbandes und dem oberen Rand des Valenzbandes entsprechenden Energiewerte, E_T bezeichnet das Energieniveau der Traps.

Setzt man (11) und (12) in (9) und (10) ein und subtrahiert man (9) von (10), so ergibt sich mit (7)

$$\operatorname{div}(\mathbf{j}_n + \mathbf{j}_p) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (14)$$

Diese Gleichung bringt in Verbindung mit (6) zum Ausdruck, daß die Gesamtstromdichte

$$\mathbf{j}_g = -en\mathbf{v}_n + ep\mathbf{v}_p + eD_n \operatorname{grad} n - eD_p \operatorname{grad} p + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (15)$$

divergenzfrei ist,

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_g = 0. \quad (16)$$

Die Bewegungsgleichungen

VII

$$\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} + (\mathbf{v}_n \operatorname{grad}) \mathbf{v}_n + \gamma_n \mathbf{v}_n = -\frac{e}{m_n} \left\{ \mathbf{E}^* + \frac{\mu}{c} \mathbf{v}_n \times \mathbf{H} \right\}, \quad (17)$$

VIII

$$\frac{\partial \mathbf{v}_p}{\partial t} + (\mathbf{v}_p \operatorname{grad}) \mathbf{v}_p + \gamma_p \mathbf{v}_p = \frac{e}{m_p} \left\{ \mathbf{E}^* + \frac{\mu}{c} \mathbf{v}_p \times \mathbf{H} \right\} \quad (18)$$

(m_n , m_p effektive Massen). Die Dämpfungsfrequenzen hängen mit den Relaxationszeiten wie folgt zusammen

$$\gamma_n = \frac{1}{\tau_n} = \frac{1}{\tau_{nT}} + \frac{1}{\tau_{ns}}, \quad (19)$$

$$\gamma_p = \frac{1}{\tau_p} = \frac{1}{\tau_{pT}} + \frac{1}{\tau_{ps}}. \quad (20)$$

Sie sind Funktionen der Temperatur und der Störstellenkonzentration. Die Größen τ_{nT} und τ_{pT} liefern den aus den thermischen Gitterschwingungen resultierenden Beitrag, während τ_{ns} und τ_{ps} von der Streuung der Ladungsträger an den Störatomen herühren⁹.

Unter \mathbf{E}^* in (17) und (18) verstehen wir die auf die Elektronen und Defektelektronen wirkende effektive Feldstärke. Sie bedeutet diejenige Feldstärke, die am Ort eines bestimmten einzelnen Ladungsträgers vorhanden wäre, wenn man sich diesen aus dem Körper entfernt denkt, ohne dabei den Zustand der Umgebung zu ändern. Infolge der dielektrischen Polarisation des Gitters wird in den Bewegungsgleichungen der Feldvektor \mathbf{E} modifiziert, und wir

haben an seiner Stelle die effektive Feldstärke \mathbf{E}^* zu setzen. Es gilt dann unter der Annahme eines isotropen Depolarisationsfaktors³ L

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} - L\mathbf{P}. \quad (21)$$

Im Prinzip ließe sich der Depolarisationsfaktor für einen gegebenen Kristall theoretisch errechnen, indem man die resultierende Wirkung aller vorhandenen Ladungen auf ein bestimmtes Teilchen berücksichtigt. Im folgenden wird L als freier Parameter betrachtet, dessen Wert vermutlich 5 nicht übersteigt. Die Polarisation \mathbf{P} setzt sich aus einem den Elektronen und einem den Löchern zugeordneten Anteil zusammen:

$$\mathbf{P}_n = \chi_{0n} \mathbf{E}^* - en\mathbf{r}_n, \quad (22)$$

$$\mathbf{P}_p = \chi_{0p} \mathbf{E}^* + ep\mathbf{r}_p, \quad (23)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_n + \mathbf{P}_p. \quad (24)$$

Hierbei sind \mathbf{r}_n und \mathbf{r}_p die Vektoren der gemittelten räumlichen Verschiebung der einzelnen Elektronen bzw. Defektelektronen unter dem Einfluß von \mathbf{E}^* , bezogen auf das Gesamtsystem der ruhenden Zentren. Es ist

$$\partial \mathbf{r}_n / \partial t = \mathbf{v}_n, \quad \partial \mathbf{r}_p / \partial t = \mathbf{v}_p. \quad (25)$$

Die Größe χ_{0n} ist die dielektrische Suszeptibilität pro Volumeneinheit des Kristalls ausschließlich der Elektronen, χ_{0p} die entsprechende Größe ausschließlich der Löcher. Bezeichnen wir mit ϵ_0 die Dielektrizitätskonstante des trägerfreien Kristallgitters und mit χ_n und χ_p die von den Elektronen und Löchern herrührenden frequenzabhängigen Anteile der dielektrischen Suszeptibilität, so hat man für die vollständige Dielektrizitätskonstante zu setzen:

$$\epsilon = \epsilon_0 + 4\pi\chi, \quad \chi = \chi_n + \chi_p, \quad (26)$$

$$\epsilon_0 = 1 + 4\pi\chi_0, \quad \chi_0 = \chi_{0n} + \chi_{0p}. \quad (27)$$

Man erhält dann unter Berücksichtigung der Formel (21) bis (24) und (26), (27) schließlich die folgenden Beziehungen

$$\mathbf{E}^* = \eta(\mathbf{E} + L en\mathbf{r}_n - L ep\mathbf{r}_p), \quad (28)$$

$$\mathbf{P} = \eta(\chi_0 \mathbf{E} - en\mathbf{r}_n + ep\mathbf{r}_p), \quad (29)$$

$$\mathbf{P}_n = \chi_{0n} \eta \mathbf{E} - (1 - \chi_{0n} \eta L) en\mathbf{r}_n - \chi_{0n} \eta L ep\mathbf{r}_p, \quad (30)$$

$$\mathbf{P}_p = \chi_{0p} \eta \mathbf{E} + (1 - \chi_{0p} \eta L) ep\mathbf{r}_p + \chi_{0p} \eta L en\mathbf{r}_n \quad (31)$$

mit der Abkürzung

$$\eta = 1/(1 + L\chi_0). \quad (32)$$

⁹ E. M. CONWELL, Proc. Inst. Radio Engrs 40, 1327 [1952].

Wegen der Beziehung

$$\mathbf{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E} = (\chi_0 + \chi) \mathbf{E} \quad (33)$$

folgt aus (29)

$$-e n \mathbf{r}_n + e p \mathbf{r}_p = \zeta \mathbf{E}^*, \quad (34)$$

wobei

$$\zeta = \frac{(1 + \chi_0 L) \{ (1 + \chi_0 L) (\chi_0 + \chi) - \chi_0 \}}{1 - L \{ (1 + \chi_0 L) (\chi_0 + \chi) - \chi_0 \}} \quad (35)$$

einen Ausdruck für die gesamte Polarisierbarkeit darstellt. Für $\chi_0 \rightarrow 0$ ergibt sich in bezug auf den elektronischen Anteil

$$\zeta^* = \chi / (1 - L \chi). \quad (36)$$

In die Fundamentalgleichungen III, V, VI, VII und VIII haben wir uns die Ausdrücke für \mathbf{E}^* , \mathbf{P} , \mathbf{P}_n und \mathbf{P}_p gemäß (28), (29), (30) und (31) eingesetzt zu denken.

Periodische Zustände

Hinsichtlich der Schwingungen bzw. Wellen des Plasmas machen wir einen Exponentialansatz für die Störungsglieder ganz analog zur Behandlung der entsprechenden Vorgänge in Gasen^{10, 11, 12}. Die Störungsglieder, die wir mit einem Winkelzeichen kennzeichnen wollen, werden im Vergleich zu den ungestörten Plasmagrößen als klein angenommen. Wir zerlegen die Zustandsgrößen des Plasmas in einen stationären und einen nichtstationären Anteil wie folgt:

$$\begin{aligned} n &= n_0(\mathbf{r}) + n^\sim(\mathbf{r}, t), \\ p &= p_0(\mathbf{r}) + p^\sim(\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^\sim(\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{H}^\sim(\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{v}_n &= \mathbf{v}_{n0}(\mathbf{r}) + \mathbf{v}_n^\sim(\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{v}_p &= \mathbf{v}_{p0}(\mathbf{r}) + \mathbf{v}_p^\sim(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (37)$$

Das stationäre Plasma wird durch die zeitunabhängigen Größen $n_0(\mathbf{r})$, $p_0(\mathbf{r})$ und $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$ beschrieben. Diese sind Lösungen der folgenden drei Fundamentalgleichungen unter Berücksichtigung vorgegebener Randbedingungen

$$\text{III a} \quad \text{div } \mathbf{E}_0 + 4\pi \text{div } \mathbf{P}_0 = 4\pi e(p_0 - n_0 + N_d - N_a), \quad (38)$$

$$\text{V a} \quad -\frac{1}{e} \text{div } \mathbf{j}_{n0} = -R(n_0 p_0 - n_i^2), \quad (39)$$

$$\text{VI a} \quad \frac{1}{e} \text{div } \mathbf{j}_{p0} = -R(n_0 p_0 - n_i^2) \quad (40)$$

mit

$$\mathbf{j}_{n0} = -e n_0 \mathbf{v}_{n0} + e D_n \text{grad } n_0, \quad (41)$$

$$\mathbf{j}_{p0} = e p_0 \mathbf{v}_{p0} - e D_p \text{grad } p_0 \quad (42)$$

und der Gesamtstromdichte

$$\mathbf{j}_{g0} = \mathbf{j}_{n0} + \mathbf{j}_{p0}; \quad \text{div } \mathbf{j}_{g0} = 0. \quad (43)$$

Die stationären Driftgeschwindigkeiten ergeben sich dann aus $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ durch die Beziehungen

$$\mathbf{v}_{n0} = -\mu_n \mathbf{E}_0(\mathbf{r}), \quad (44)$$

$$\mathbf{v}_{p0} = \mu_p \mathbf{E}_0(\mathbf{r}); \quad (45)$$

die Größen μ_n und μ_p sind die Beweglichkeiten, die bei Anwesenheit eines stationären Magnetfeldes die Form eines Tensors annehmen. Bei hinreichend hohen elektrischen Feldern werden μ_n und μ_p feldabhängig, und es treten hierbei charakteristische Abweichungen vom OHMSchen Gesetz auf¹.

Bei nichtstationären Plasmavorgängen sind hingegen nicht 3, sondern 6 Zustandskomponenten zur Beschreibung des Vorganges maßgebend. Für diese machen wir den Ansatz

$$n^\sim = n_0^\sim \psi; \quad p^\sim = p_0^\sim \psi; \quad \mathbf{E}^\sim = \mathbf{E}_0^\sim \psi; \quad \mathbf{H}^\sim = \mathbf{H}_0^\sim \psi;$$

$$\mathbf{v}_n^\sim = \mathbf{v}_{n0}^\sim \psi; \quad \mathbf{v}_p^\sim = \mathbf{v}_{p0}^\sim \psi \quad (46)$$

$$\psi = \exp i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \quad (47)$$

Die Phasenverschiebungen der einzelnen Komponenten gegeneinander sind in die Amplituden einbezogen zu denken. In speziellen Fällen können auch Komponenten der Plasmawelle im ganzen Kristall verschwinden. Plasmaschwingungen sind ein Spezialfall des durch (46) und (47) beschriebenen Bewegungszustandes, der dadurch charakterisiert ist, daß die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der Phase verlorengegangen ist.

Wenn man in der angegebenen Weise eine durch die 6 Zustandskomponenten in (46) gekennzeichnete Plasmawelle voraussetzt, so kann diese nur unter bestimmten Bedingungen existieren. Diese Bedingung kommt in einer Dispersionsrelation zwischen dem Wellenvektor \mathbf{k} und der aufgeprägten Frequenz ω zum Ausdruck. Als bestimmende Parameter gehen eine Reihe von charakteristischen Größen in die Existenzbedingung ein, über die man bis zu einem gewissen Grade durch geeignete Auswahl der Substanz, durch Dotierung, Temperatur und äußere Felder sowie durch die geometrische Begrenzung und die Beschaffenheit der Oberfläche frei verfügen

¹⁰ R. SEELIGER, Z. Phys. **118**, 618 [1941].

¹¹ A. SCHLÜTER, Ann. Phys., Lpz. **10**, 418 [1952].

¹² G. WINKLER, Ann. Phys., Lpz. **16**, 414 [1955].

kann. Durch diese verfügbaren Parameter werden zum Teil auch die Eigenfrequenzen des Plasmas sowie die LARMOR-Frequenz bestimmt, die in die Dispersionsbedingung eingehen. Man erkennt hieraus, daß man es im Prinzip durch geeignete Maßnahmen in der Hand hat, in Halbleitern dem Plasma eigene periodische Zustände zu erzeugen. Es bietet sich nunmehr der Weg an, die Existenzbedingung in völliger Allgemeinheit zu formulieren und anschließend von hier aus Spezialfälle zu klassifizieren. Es ist jedoch häufig zweckmäßiger, zunächst an einfachen Modellen auf dem direkten Wege die Bedingungen für einen Wellenvorgang zu berechnen und diejenigen Wesenszüge der Erscheinung zu bestimmen, die für das Frequenzverhalten des Halbleiters besonders charakteristisch sind.

Als Ausgangspunkt hierfür ist es jedoch ange-

bracht, die Fundamentalgleichungen zu linearisieren, wobei die Zustandskomponenten (46) des nichtstationären Plasmas mit den stationären Zustandsgrößen des Halbleiters verknüpft werden. Die letztgenannten sind hierbei als räumlich vorgegebene Strukturparameter des Halbleiters anzusehen.

Setzt man (37) in die Fundamentalgleichung ein, so kann man ein entsprechendes Gleichungssystem für die zeitabhängigen Zustandsgrößen separieren. Produkte von je zwei Störungsgrößen sollen hierbei als klein vernachlässigt werden. Schließlich machen wir noch die vereinfachende Voraussetzung, daß der Rekombinationskoeffizient R nur von den ungestörten Trägerkonzentrationen abhängen soll.

Unter diesen Voraussetzungen erhält man als Resultat das folgende System linearisierter Gleichungen des Plasmas:

Die Feldgleichungen

$$I^* \quad -e(n_0 \mathbf{v}_n^\sim + \mathbf{v}_{n0} n^\sim) + e(p_0 \mathbf{v}_p^\sim + \mathbf{v}_{p0} p^\sim) + e D_n \text{grad } n^\sim - e D_p \text{grad } p^\sim + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}^\sim}{\partial t} = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \mathbf{H}^\sim, \quad (48)$$

$$II^* \quad -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}^\sim}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{E}^\sim. \quad (49)$$

Die Kontinuitätsgleichungen

$$V^* \quad \frac{\partial n^\sim}{\partial t} + \mathbf{v}_n^\sim \text{grad } n_0 + \mathbf{v}_{n0} \text{grad } n^\sim + n_0 \text{div } \mathbf{v}_n^\sim + n^\sim \text{div } \mathbf{v}_{n0} - D_n \text{div grad } n^\sim + \text{div} \left\{ \frac{1}{e} \chi_{0n} \eta \frac{\partial \mathbf{E}^\sim}{\partial t} - (1 - \chi_{0n} \eta L) \left(\frac{\partial n^\sim}{\partial t} \mathbf{r}_{n0} + n_0 \mathbf{v}_n^\sim + \mathbf{v}_{n0} n^\sim \right) - \chi_{0n} \eta L \left(\frac{\partial p^\sim}{\partial t} \mathbf{r}_{p0} + p_0 \mathbf{v}_p^\sim + \mathbf{v}_{p0} p^\sim \right) \right\} = -R(n_0 p^\sim + p_0 n^\sim), \quad (50)$$

$$VI^* \quad \frac{\partial p^\sim}{\partial t} + \mathbf{v}_p^\sim \text{grad } p_0 + \mathbf{v}_{p0} \text{grad } p^\sim + p_0 \text{div } \mathbf{v}_p^\sim + p^\sim \text{div } \mathbf{v}_{p0} - D_p \text{div grad } p^\sim - \text{div} \left\{ \frac{1}{e} \chi_{0p} \eta \frac{\partial \mathbf{E}^\sim}{\partial t} + (1 - \chi_{0p} \eta L) \left(\frac{\partial p^\sim}{\partial t} \mathbf{r}_{p0} + p_0 \mathbf{v}_p^\sim + \mathbf{v}_{p0} p^\sim \right) + \chi_{0p} \eta L \left(\frac{\partial n^\sim}{\partial t} \mathbf{r}_{n0} + n_0 \mathbf{v}_n^\sim + \mathbf{v}_{n0} n^\sim \right) \right\} = -R(n_0 p^\sim + p_0 n^\sim). \quad (51)$$

Die Bewegungsgleichungen

$$VII^* \quad \frac{\partial \mathbf{v}_n^\sim}{\partial t} + (\mathbf{v}_{n0} \text{grad}) \mathbf{v}_n^\sim + (\mathbf{v}_n^\sim \text{grad}) \mathbf{v}_{n0} + \gamma_n \mathbf{v}_n^\sim + \Omega_{n0}^2 \mathbf{r}_n^\sim + \Theta_n n^\sim + \mu \mathbf{v}_n^\sim \times \vec{\omega}_n = -\frac{e}{m_n} \eta \mathbf{E}^\sim + \frac{m_p}{m_n} \Omega_{p0}^2 \mathbf{r}_p^\sim + \frac{m_p}{m_n} \Theta_p p^\sim - \frac{e}{m_n} \frac{\mu}{c} \mathbf{v}_{n0} \times \mathbf{H}^\sim, \quad (52)$$

$$VIII^* \quad \frac{\partial \mathbf{v}_p^\sim}{\partial t} + (\mathbf{v}_{p0} \text{grad}) \mathbf{v}_p^\sim + (\mathbf{v}_p^\sim \text{grad}) \mathbf{v}_{p0} + \gamma_p \mathbf{v}_p^\sim + \Omega_{p0}^2 \mathbf{r}_p^\sim + \Theta_p p^\sim + \mu \mathbf{v}_p^\sim \times \vec{\omega}_p = \frac{e}{m_p} \eta \mathbf{E}^\sim + \frac{m_n}{m_p} \Omega_{n0}^2 \mathbf{r}_n^\sim + \frac{m_n}{m_p} \Theta_n n^\sim + \frac{e}{m_p} \frac{\mu}{c} \mathbf{v}_{p0} \times \mathbf{H}^\sim. \quad (53)$$

Die hier auftretenden Frequenzen Ω_{n0} und Ω_{p0} stehen mit der LANGMUIRSchen Plasmafrequenz ω_{n0} und ω_{p0} in folgendem Zusammenhang

$$\Omega_{n0}^2 = L \eta \frac{e^2 N_d}{m_n} = \frac{L}{4\pi} \omega_{n0}^2, \quad (54)$$

$$\Omega_{p0}^2 = L \eta \frac{e^2 N_a}{m_n} = \frac{L}{4\pi} \omega_{p0}^2; \quad (55)$$

sie verschwinden, wenn der Depolarisationsfaktor $L \rightarrow 0$ geht, da hierbei nach (32) $\eta = 1$ wird. Die Größen $\vec{\omega}_n$ und $\vec{\omega}_p$ bedeuten die Vektoren der LARMOR-Frequenzen, die zu dem stationären magnetischen Feld H_0 gehören

$$\vec{\omega}_n = \frac{e}{m_n} \frac{\mathbf{H}_0}{c}, \quad \vec{\omega}_p = -\frac{e}{m_p} \frac{\mathbf{H}_0}{c}. \quad (56)$$

$$\text{III}^* \quad \frac{1}{4\pi} (1 + 4\pi\eta\chi_0) \operatorname{div} \mathbf{E}^\sim - \eta e \{ \mathbf{r}_n^\sim \operatorname{grad} n_0 + \mathbf{r}_{n0}^\sim \operatorname{grad} n^\sim + n_0 \operatorname{div} \mathbf{r}^\sim + n^\sim \operatorname{div} \mathbf{r}_{n0}^\sim \} \\ + \eta e \{ \mathbf{r}_p^\sim \operatorname{grad} p_0 + \mathbf{r}_{p0}^\sim \operatorname{grad} p^\sim + p_0 \operatorname{div} \mathbf{r}_p^\sim + p^\sim \operatorname{div} \mathbf{r}_{p0}^\sim \} = e(p^\sim - n^\sim). \quad (58)$$

Aus den linearisierten Fundamentalgleichungen gewinnt man nunmehr die Existenzbedingung für die Plasmawelle, wenn man mit dem Ansatz (46), (47) in die Gleichungen eingeht. Hierbei ist eine Klassifikation der Plasmawellen zweckmäßig. Auf diese Weise erhält man Auskunft über das Frequenzverhalten des Halbleiters, indem man die Materialeigenschaften wie den Brechungsindex, den Extinktionskoeffizienten, die Dielektrizitätskonstante, die Leitfähigkeit usw. als Funktionen der Frequenz, der Dotierung und der Temperatur bei einer vorgegebenen Halbleiteranordnung bekommt. Wir werden das Verhalten einer Plasmawelle weiter unten an einem speziellen, naheliegenden Beispiel untersuchen. Zunächst wollen wir jedoch zur Orientierung im Hinblick auf die Frage möglicher Anwendungen einige einfache, aber grundsätzliche Zusammenhänge erörtern.

Orientierende Betrachtung

Wir betrachten den denkbar einfachsten Fall einer Plasmaschwingung. Als Modell wählen wir eine homogene, eindimensionale Halbleiteranordnung und beschränken uns auf eine Art von Ladungsträgern (z. B. die Elektronen), die als Ganzes im Kristall unter Einwirkung eines periodischen elektrischen Feldes oszillieren. Es handelt sich also um die Leitungselektronen im n-Material oder um die Minoritätsträger in einem Kristall vom p-Typ; wir ziehen den Hintergrund der Majoritätsträger, der in der Gl. VII* in (52) durch Zusatzglieder zum Ausdruck kommt, nicht in Betracht. Die Teilchenkonzentration bleibt hierbei überall zeitlich und räumlich konstant. Rekombination und Paarbildung sollen keine Rolle spielen. Schließlich sehen wir von dem Einfluß des magnetischen Feldes ab.

Schließlich sind noch

$$\Theta_n = \eta L \frac{e^2 \mathbf{r}_{n0}}{m_n}; \quad \Theta_p = \eta L \frac{e^2 \mathbf{r}_{p0}}{m_p} \quad (57)$$

zu notieren; die Größen \mathbf{r}_{n0} und \mathbf{r}_{p0} sind die stationären räumlichen Verschiebungen der Ladungsträger infolge des wirksamen effektiven elektrischen Feldes. Als räumliche Bedingung tritt noch die Poisson-Gleichung hinzu:

Unter diesen Voraussetzungen reduziert sich das System der Fundamentalgleichungen auf die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}_n^\sim}{\partial t^2} + \gamma_n \frac{\partial \mathbf{r}_n^\sim}{\partial t} + \Omega_{n0}^2 \mathbf{r}_n^\sim = -\frac{e}{m_n} \eta \mathbf{E}^\sim, \quad (59)$$

die Größe Ω_{n0}^2 ist durch (54) gegeben. Für das die Oszillation verursachende elektrische Feld machen wir den Ansatz $\mathbf{E}^\sim = E_0^\sim \exp(i\omega t)$. Aus der Lösung der Differentialgleichung (59) folgt dann für die Leitfähigkeit

$$\sigma_n = \frac{\eta \omega_{n0}^2}{4\pi} \frac{\gamma_n \omega^2}{\left(\omega^2 - \frac{L\eta}{4\pi} \omega_{n0}^2\right)^2 + \omega^2 \gamma_n^2} \quad (60)$$

und für die dielektrische Suszeptibilität

$$\chi_n = -\frac{\eta \omega_{n0}^2}{4\pi} \frac{\left(\omega^2 - \frac{L\eta}{4\pi} \omega_{n0}^2\right)}{\left(\omega^2 - \frac{L\eta}{4\pi} \omega_{n0}^2\right)^2 + \omega^2 \gamma_n^2}, \quad (61)$$

womit sich zugleich die Dielektrizitätskonstante nach $\epsilon = \epsilon_0 + 4\pi\chi_n$ ergibt.

In einer Modifikation des Modells denken wir uns jetzt nicht die Feldstärke, sondern die Wechselstromkomponente des Stromes

$$j_n^\sim = -e N_d v_n^\sim + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}^\sim}{\partial t} \quad (62)$$

vorgegeben, für die wir wieder einen Exponentialansatz $\sim \exp(i\omega t)$ machen. Aus (59) und (62) läßt sich das elektrische Feld eliminieren, und man erhält dann die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial^2 v_n^\sim}{\partial t^2} + \gamma_n \frac{\partial v_n^\sim}{\partial t} + \eta \left(1 + \frac{L}{4\pi}\right) \omega_{n0}^2 v_n^\sim = -4\pi\eta \frac{e}{m_n} j_n^\sim. \quad (63)$$

Diese Gleichung ist formal dieselbe wie bei SEELIGER¹⁰. Unser Modell ist jedoch insofern davon ver-

schieden, als bei SEELIGER der wechselstrommäßige Leerlaufzustand untersucht wird, wobei auch die Teilchenkonzentration oszilliert. Die Stromdichte bleibt in diesem Falle zeitlich konstant. Das durch (63) beschriebene Plasma hat hinsichtlich seines gedämpften Schwingungsanteiles die Eigenfrequenz

$$\tilde{\omega}_n = \sqrt{\eta \left(1 + \frac{L}{4\pi}\right) \omega_{n0}^2 - \frac{\gamma_n^2}{4}} \quad (64)$$

($\omega_{n0}^2 = 4\pi e^2 N_d / m_n$ ist das Quadrat der LANGMUIR'schen Plasmafrequenz). Für die Existenz der gedämpften Eigenschwingung besteht somit die Bedingung

$$\gamma_n < 2 \sqrt{\eta \left(1 + \frac{L}{4\pi}\right) \frac{4\pi e^2 N_d}{m_n}}. \quad (65)$$

Die erzwungene Plasmaschwingung liefert eine Resonanzkurve

$$\frac{v_{n0}^2}{v_{n0\max}^2} = \frac{\omega^2 \gamma_n^2}{(\omega^2 - \tilde{\omega}_{n0}^2)^2 + \gamma_n^2 \omega^2} \quad (66)$$

mit der Eigenfrequenz der ungedämpften Plasmaschwingung

$$\tilde{\omega}_{n0} = \sqrt{\eta \left(1 + \frac{L}{4\pi}\right) \frac{4\pi e^2 N_d}{m_n}}. \quad (67)$$

Die in den Ausdrücken für σ_n , χ_n und für die Eigenfrequenzen zum Ausdruck kommenden Gesetzmäßigkeiten interessieren insbesondere quantitativ in bezug auf das Gebiet der Wellenlängen, aber auch insoweit, wie die Eigenschaften des Halbleiterplasmas mit der Dotierung N_d mit der Temperatur T und mit dem Depolarisationsfaktor L modifiziert werden.

Aus diesem Grunde haben wir, basierend auf einer Veröffentlichung von CONWELL⁹, am Beispiel des Germaniums die Dämpfungsfrequenz γ_n im Störleitungsbereich als Funktion der Temperatur und der Dotierung berechnet und in Abb. 1 und Abb. 2 dargestellt. Bei Germanium ist die effektive Masse durch Zyklotron-Resonanzmessungen von LAX, ZEIGER, DEXTER und ROSENBLUM¹³ sowie von CRAWFORD und STEVENS¹⁴ experimentell bekannt, ihr Wert liegt bei $m_n = 0,12 m$ (m Elektronenmasse). Wir haben an anderer Stelle im Anschluß an KAHN¹⁵

gezeigt, welchen Einfluß dieses Ergebnis auf die optischen Eigenschaften der Leitungselektronen im Ultrarot hat¹⁶.

Aus Abb. 1 ist zu ersehen, in welcher Weise die Dämpfungsfrequenz mit der Temperatur zunimmt. Bei hinreichend hohen Temperaturen spielt der Beitrag der Streuung an Störstellen gegenüber der Wechselwirkung mit den thermischen Schallquanten des Gitters praktisch keine Rolle mehr, während bei niedrigen Temperaturen γ_n durch die Störstellenkonzentration modifiziert wird. Wenn die Störstellen-

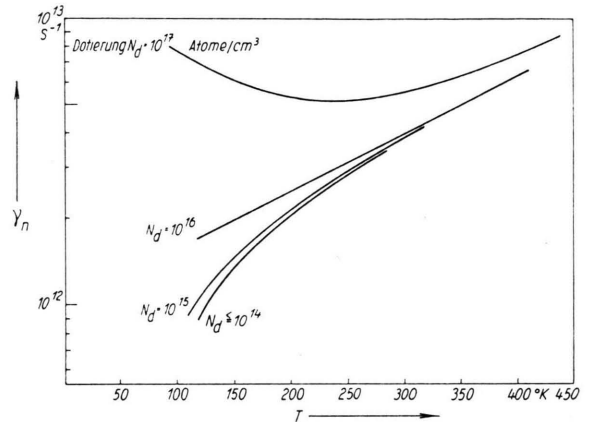


Abb. 1. Dämpfungskonstante γ_n als Funktion der Temperatur T bei n-Germanium.

konzentration groß genug ist, so wird der Temperaturkoeffizient sogar negativ und durchläuft mit steigender Temperatur ein Minimum. In Abb. 2 sieht

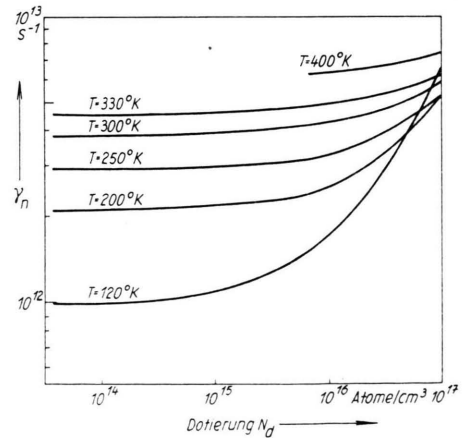


Abb. 2. Dämpfungskonstante γ_n als Funktion der Dotierung bei n-Germanium.

¹³ B. LAX, H. J. ZEIGER, R. N. DEXTER u. E. S. ROSENBLUM, Phys. Rev. **93**, 1418 [1954].

¹⁴ L. H. CRAWFORD u. D. K. STEVENS, Phys. Rev. **94**, 1415 (A) [1954].

¹⁵ A. H. KAHN, Phys. Rev. **97**, 1647 [1955].

¹⁶ E. GROSCHWITZ u. R. WIESNER, Z. angew. Phys. **1956**; im Druck.

man besonders deutlich, daß γ_n um so stärker mit der Dotierung variiert, je kleiner die Temperatur ist. In Abb. 3 ist die Eigenfrequenz des ungedämpften Systemes in Abhängigkeit von der Dotierung bei zwei verschiedenen Werten für L aufgetragen. Da $\tilde{\omega}_{n0}$ nach (66) in dem hier betrachteten Fall Resonanzfrequenz ist, kann man aus Abb. 3 zugleich entnehmen, in welchem Frequenzgebiet die Resonanzstelle liegt, und insbesondere, wie sich diese mit der Dotierung verschiebt. Die Dämpfungsfrequenz γ_n ist näherungsweise gleich der doppelten Halbwertsbreite. Somit geben Abb. 1 und Abb. 2 auch Auskunft über die Breite der Resonanzlinie, insbesondere über ihre Verbreiterung mit zunehmender Dotierung und bei ansteigender Temperatur.

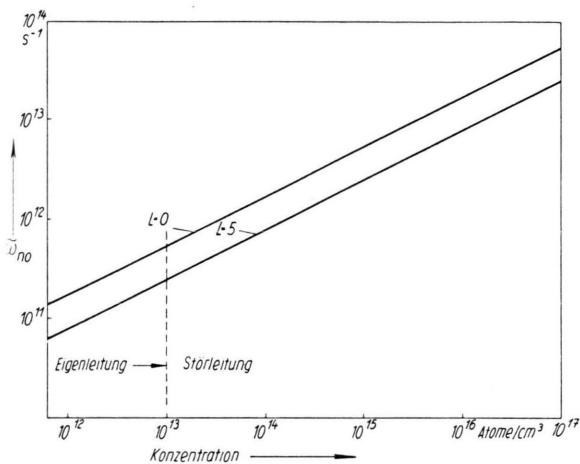


Abb. 3. Plasmafrequenz $\tilde{\omega}_{n0}$ als Funktion der Konzentration (Depolarisationsfaktor L als Parameter).

Wir betrachten jetzt die Oszillationsbedingung (65) für die gedämpfte Plasmaschwingung. Nach (64) muß die Dämpfungsfrequenz hinreichend klein sein, damit die Oszillation existiert. Die Eigenfrequenz $\tilde{\omega}_n$ in (64) verschwindet für ein Plasma mit vorgegebener Dotierung bei einer ganz bestimmten Grenztemperatur T^* .

Oberhalb dieser Temperatur kann keine Oszillation mehr stattfinden. In Abb. 4 ist die Grenztemperatur T^* als Funktion der Dotierung dargestellt. Man kann daraus ersehen, bis zu welcher Temperatur bei einem Kristall mit vorgegebener Dotierung noch gedämpfte Eigenschwingungen auftreten können. Durch den Depolarisationseffekt wird die Grenztemperatur noch wesentlich modifiziert.

Abb. 5 zeigt, daß die Eigenfrequenz $\tilde{\omega}_n$ bei einer vorgegebenen Temperatur mit abnehmender Dotie-

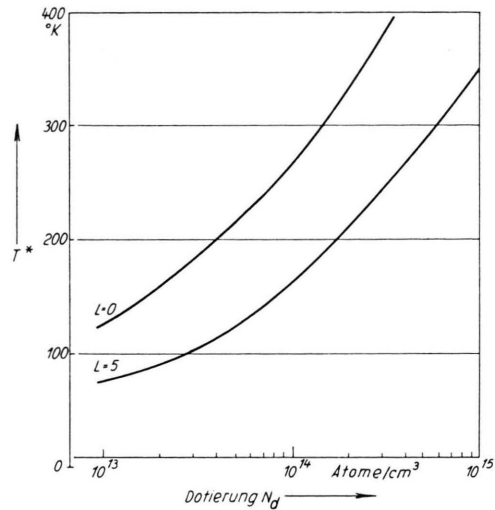


Abb. 4. Grenztemperatur T^* als Funktion der Dotierung (Depolarisationsfaktor L als Parameter).

rung immer kleiner wird und bei einer bestimmten Dotierung schließlich verschwindet. Bei noch kleineren Teilchenkonzentrationen gibt es infolge der Dämpfung keine gedämpften Eigenschwingungen mehr. Die Größe dieser Grenzdotierung hängt wiederum von der Temperatur ab. Es ist bemerkenswert, daß man infolge des Dämpfungseffektes ohne weiteres in den Bereich technisch interessierender Frequenzen gelangt, wenn man sich von größeren Werten der Dotierung herkommend der Grenzdotierung nähert.

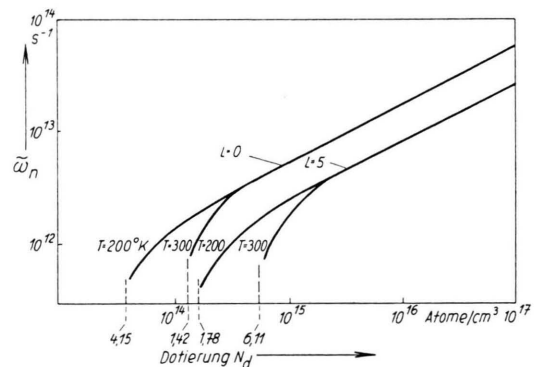


Abb. 5. Eigenfrequenz $\tilde{\omega}_n$ als Funktion der Dotierung (L als Parameter).

Der Verlauf der Leitfähigkeit σ_n mit der Frequenz bei 200°K und 300°K ist in Abb. 6 wiedergegeben. Durch den Depolarisationseffekt wird die Leitfähigkeit in sehr charakteristischer Weise verändert. Es tritt für $L \neq 0$ sogar Plasmaresonanz auf, die zur Folge hat, daß insbesondere auf der Seite

kleineren Frequenzen grundsätzliche Abweichungen von dem Leitfähigkeitsverhalten bei $L=0$ zu erwarten sind. DRESSELHAUS, KIP und KITTEL³ haben die Vermutung ausgesprochen, daß bisher noch ungeklärte Anomalien bei Leitfähigkeitsmessungen im Millimeter- und Mikrowellenbereich auf dieser Erscheinung beruhen.

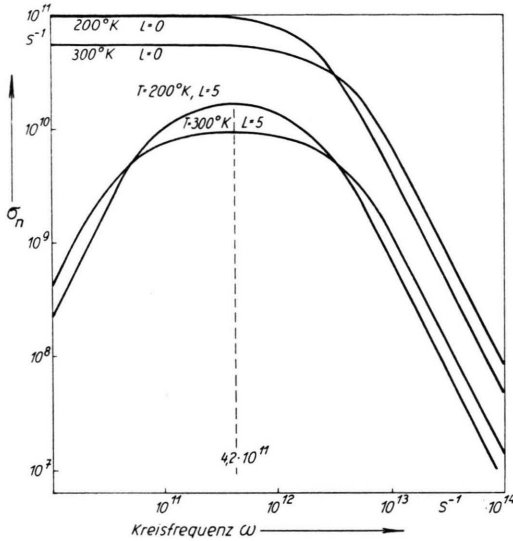


Abb. 6. Leitfähigkeit σ_n als Funktion der Frequenz bei n-Germanium; Dotierung 10^{14} Atome/cm³ (L als Parameter).

Abb. 7 zeigt den Verlauf der Dielektrizitätskonstanten mit der Frequenz bei 200° und bei 300° K. Infolge des Depolarisationseffektes sind auch hier bei kleinen Frequenzen bemerkenswerte Abweichungen von dem Verlauf bei $L=0$ zu erwarten. Man sieht, daß für hinreichend große Frequenzen der elektronische Anteil von ϵ gegen den vom Gitter herührenden Beitrag ϵ_0 vernachlässigbar klein wird. Der durch die freien Ladungsträger bedingte Temperatureinfluss macht sich erst bei relativ kleinen Frequenzen bemerkbar. Bei schwach dotiertem Material ist ϵ in der Umgebung der Zimmertemperatur positiv und nimmt im Falle $L=0$ mit steigender Temperatur und bei größer werdender Frequenz zu. Bei hinreichend kleinen Frequenzen nimmt ϵ mit wachsender Dotierung ab und kann schließlich auch negative Werte annehmen. Wenn jedoch die Depolarisation von Null verschieden ist, so zeigt sich insbesondere bei relativ kleinen Frequenzen eine charakteristische Anomalie, indem nunmehr bei $L \neq 0$ die Dielektrizitätskonstante sogar größer als ϵ_0 werden kann. In diesem Frequenzbereich ist der Tem-

peraturkoeffizient von ϵ negativ, während bei $L=0$ ein positiver Temperaturkoeffizient vorhanden ist.

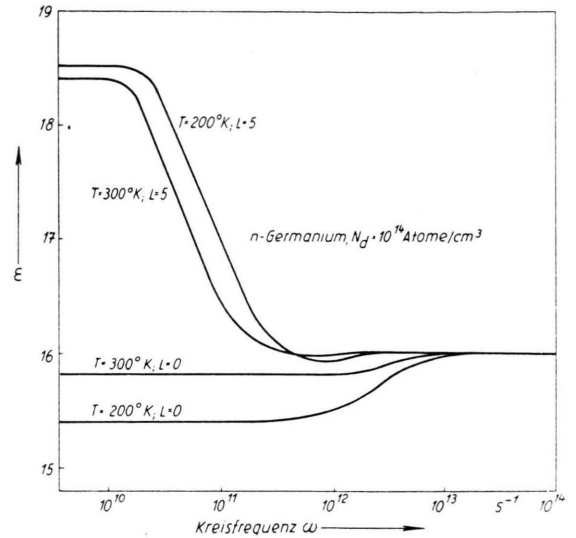


Abb. 7. Dielektrizitätskonstante ϵ als Funktion der Kreisfrequenz ω (L als Parameter).

Beispiel einer Plasmawelle

Die allgemeineren Betrachtungen der beiden ersten Abschnitte sollen jetzt an einem Beispiel explizit durchgeführt werden. Als Modell wählen wir einen unbegrenzten, homogenen und raumladungsfreien Halbleiter (n-Typ). Von der Anwesenheit der Minoritätsträger sehen wir wiederum ab. Wir setzen insbesondere voraus, daß die Elektronenkonzentration zeitlich und räumlich im gesamten Halbleiter konstant bleibt. Als äußere Strukturparameter des stationären Plasmas geben wir vor:

$$\mathbf{v}_{n0} = (v_{n0x}, v_{n0y}, 0); \quad \mathbf{H}_0 = (0, 0, H_{0z}). \quad (68)$$

Der elektromagnetische Teil der Plasmawelle sei eine parallel zur z-Achse polarisierte Welle, die sich in Richtung der x-Achse fortpflanzt. Die Plasmawelle besteht somit aus den folgenden Komponenten

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^\sim &= (0, E_y^\sim, 0); \quad \mathbf{H}^\sim = (0, 0, H_z^\sim); \\ \mathbf{v}_n^\sim &= (v_{nx}^\sim, v_{ny}^\sim, 0), \end{aligned} \quad (69)$$

für die wir den Ansatz machen

$$\begin{aligned} E_y^\sim &= E_{y0} \psi, \quad H_z^\sim = H_{z0} \psi, \quad v_{nx}^\sim = v_{nx0} \psi, \quad v_{ny}^\sim = v_{ny0} \psi; \\ \psi &= \exp i(\omega t - kx); \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}. \end{aligned} \quad (70)$$

Mit (70) gehen wir in die Feld- und Bewegungsgleichungen I*, II*, III* ein. Diese lauten jetzt

$$\text{I}^* \quad \frac{1}{c} \frac{\partial E_y^\sim}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} e N_d v_{ny}^\sim = - \frac{\partial H_z^\sim}{\partial x}, \quad (71)$$

$$\text{II}^* \quad - \frac{\mu}{e} \frac{\partial H_z^\sim}{\partial t} = \frac{\partial E_y^\sim}{\partial x}, \quad (72)$$

$$\text{III}^* \quad \frac{\partial v_{nx}}{\partial t} + v_{n0x} \frac{\partial v_{nx}}{\partial x} + \gamma_n v_{nx} + \Omega_{n0}^2 r_{nx} + \mu \vec{\omega} v_{nx} \\ = -\frac{e}{m_n} \frac{\mu}{c} v_{n0y} H_z^{\sim}, \quad (73)$$

$$\frac{\partial v_{ny}}{\partial t} + v_{n0x} \frac{\partial v_{ny}}{\partial x} + \gamma_n v_{ny} + \Omega_{n0}^2 r_{ny} - \mu \vec{\omega}_z v_{nx} \\ = -\frac{e}{m_n} \eta E_y^{\sim} + \frac{e}{m_n} \frac{\mu}{c} v_{n0x} H_z^{\sim}. \quad (74)$$

Aus (70) bis (74) erhält man schließlich als Existenzbedingung der Plasmawelle die Dispersionsrelation

$$i \Phi^2 \left(\omega - \frac{k^2 c^2}{\mu \omega} \right) - \Phi \left(v_{n0x} \frac{k}{\omega} - \eta \right) \omega_{n0}^2 \\ + \left\{ i \mu \vec{\omega}_z \left(\omega - \frac{k^2 c^2}{\mu \omega} \right) + \frac{\omega_{n0}^2 k}{\omega} v_{n0y} \right\} \mu \vec{\omega}_z = 0 \quad (75)$$

mit

$$\Phi = \gamma_n + i \left(\omega - k v_{n0x} - \frac{\Omega_{n0}^2}{\omega} \right); \quad \Omega_{n0}^2 = \frac{L \eta}{4 \pi} \omega_{n0}^2; \\ \eta = \frac{1}{1 + L \gamma_0}. \quad (76)$$

Wir machen jetzt noch zusätzlich die vereinfachende Voraussetzung, daß die stationäre Größe $v_{n0x} = 0$ sein soll. Nunmehr ergibt die Rechnung bei dem Ansatz $k = \beta + i \alpha$ für den Brechungsindex β und den Extinktionskoeffizienten α die folgenden Ausdrücke

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{W_1^2 + W_2^2 + W_1} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \frac{w_1 w_3}{w_1^2 + w_2^2}, \quad (77)$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{W_1^2 + W_2^2 - W_1} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \frac{w_2 w_3}{w_1^2 + w_2^2} \quad (78)$$

mit

$$W_1 = \frac{1}{4} \left\{ \frac{(w_1 w_3)^2}{(w_1^2 + w_2^2)^2} - \frac{(w_2 w_3)^2}{(w_1^2 + w_2^2)^2} \right\} - \frac{w_1 w_4 + w_2 w_5}{w_1^2 + w_2^2},$$

$$W_2 = -\frac{1}{2} \frac{w_1 w_2 w_3^2}{(w_1^2 + w_2^2)^2} - \frac{w_1 w_5 - w_2 w_4}{w_1^2 + w_2^2},$$

$$w_1 = -2 \frac{c^2 \gamma_n}{\mu} \left(1 - \frac{L \eta}{4 \pi} \frac{\omega_{n0}^2}{\omega^2} \right),$$

$$w_2 = \frac{c^2}{\mu} \left\{ \frac{\gamma_n^2}{\omega} + \frac{(\mu \vec{\omega}_z)^2}{\omega} - \omega \left(1 - \frac{L \eta}{4 \pi} \frac{\omega_{n0}^2}{\omega^2} \right)^2 \right\},$$

$$w_3 = -\mu \vec{\omega}_z v_{n0y} \frac{\omega_{n0}^2}{\omega},$$

$$w_4 = 2 \gamma_n \omega^2 \left(1 - \frac{L \eta}{4 \pi} \frac{\omega_{n0}^2}{\omega^2} \right) - \eta \omega_{n0}^2 \gamma_n,$$

$$w_5 = \omega^3 \left(1 - \frac{L \eta}{4 \pi} \frac{\omega_{n0}^2}{\omega^2} \right)^2 - \eta \omega_{n0}^2 \omega \left(1 - \frac{L \eta}{4 \pi} \frac{\omega_{n0}^2}{\omega^2} \right) \\ - \omega \gamma_n^2 - (\mu \vec{\omega}_z)^2 \omega.$$

Zwischen den Komponenten der Plasmawelle bestehen die folgenden Relationen (φ Phasenwinkel)

$$v_{ny} = \frac{i}{\omega_{n0}^2} \left(\omega - \frac{k^2 c^2}{\mu \omega} \right) \frac{e}{m_n} E_y^{\sim}, \quad (79)$$

$$\varphi_1 = \arctg \frac{\mu \omega^2 - (\beta^2 - \alpha^2) c^2}{2 \alpha \beta c^2};$$

$$v_{nx} = \frac{1}{\mu \vec{\omega}_z} \left\{ i \gamma_n - \left(\omega - \frac{L \eta}{4 \pi} \frac{\omega_{n0}^2}{\omega} \right) \right. \\ \left. \left(\omega - \frac{k^2 c^2}{\mu \omega} \right) \frac{1}{\omega_{n0}^2} + \eta \right\} \frac{e}{m_n} E_y^{\sim}. \quad (80)$$

$$\varphi_2 = \arctg \frac{C_1}{C_2},$$

$$C_1 = \frac{\gamma_n \omega}{\omega_{n0}^2} + \left(\omega - \frac{L \eta}{4 \pi} \frac{\omega_{n0}^2}{\omega} \right) \frac{2 \alpha \beta c^2}{\mu \omega \omega_{n0}^2} - \frac{\gamma_n c^2 (\beta^2 - \alpha^2)}{\mu \omega \omega_{n0}},$$

$$C_2 = \frac{c^2}{\mu \omega \omega_{n0}^2} \left[2 \alpha \beta \gamma_n + \left(\omega - \frac{L \eta}{4 \pi} \frac{\omega_{n0}^2}{\omega} \right) (\beta^2 - \alpha^2) \right] \\ - \left(\omega - \frac{L \eta}{4 \pi} \frac{\omega_{n0}^2}{\omega} \right) \frac{\omega}{\omega_{n0}^2} + \eta;$$

$$H_z^{\sim} = \frac{c}{\mu \omega} \frac{k}{\omega} E_y^{\sim}, \quad (81)$$

$$\varphi_3 = \arctg \frac{\alpha}{\beta}.$$

Aus der bisherigen orientierenden Betrachtung ist zu ersehen, daß sich unter einfachen Voraussetzungen Voraussagen über das Frequenzverhalten der freien Ladungsträger in Halbleitern auch in jenem Bereich des Spektrums machen lassen, der experimentell nur schwer zugänglich ist. Darüber hinaus ist es bemerkenswert, daß bei elektronischen Halbleitern auch im technischen Wellenlängenbereich Eigenschwingungen mit einem charakteristischen Frequenzverhalten zu erwarten sind.

Herrn Professor W. SCHOTTKY danken wir vielmals für wertvolle Hinweise und Diskussionsbemerkungen. Herrn Dr. WINRICH VON SIEMENS und Herrn Dr. R. WIESNER möchten wir für Diskussionen und insbesondere Herrn cand. ing. R. EBHARDT für seine wertvolle Mitarbeit vielmals danken.